Devoir Maison 4

Pour le 1 décembre 2025

Problème Étude des torseurs

(*d'après Centrale TSI 2017*)

Les torseurs sont des outils mathématiques utilisés en mécanique du solide indéformable.

On considère un solide indéformable Σ. Si A est un point de ce solide et si $\overrightarrow{V}(A)_{\mathcal{R}}$ désigne la vitesse du point $A \in \Sigma$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$, il est bien connu que, pour tous points A et B de Σ, on a

$$\overrightarrow{V}(B)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{V}(A)_{\mathcal{R}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{\Sigma/\mathcal{R}}$$

où $\overrightarrow{\Omega}_{\Sigma/\mathcal{R}}$ est un vecteur appelé *vecteur vitesse instantanée de rotation* du solide Σ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$.

L'application $A \mapsto \overrightarrow{V}(A)_{\mathcal{R}}$ est alors liée au *torseur cinématique*.

Cette partie se propose de dégager la théorie liée aux torseurs.

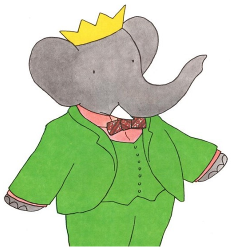
Notations :

— $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des points de l'espace géométrique orienté usuel de dimension 3 et on considère O un point fixé de $\mathcal{E}$.

— On note $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{E}$ et on considère $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ une base orthonormée directe de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

— Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est noté $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$.

— Le produit vectoriel de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.



On appelle *torseur* toute application $\mathcal{M} : \mathcal{E} \to \overrightarrow{\mathcal{E}}$ pour laquelle il existe un vecteur $\overrightarrow{r}$ tel que

$$\forall (A,B) \in \mathcal{E}^2 \qquad \mathcal{M}(B) = \mathcal{M}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{r}$$

Partie I — L'espace $\mathcal{T}$ des torseurs

1. Soit $\overrightarrow{r}$ un vecteur de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. Montrer que l'application $\mathcal{M} : A \mapsto \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{OA}$ est un torseur.
2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}$ des torseurs est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathcal{E}, \overrightarrow{\mathcal{E}})$ des applications de $\mathcal{E}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.
3. (a) Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. Rappeler, sans démonstration, une condition géométrique nécessaire et suffisante pour que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

   (b) Soit $\mathcal{M}$ un torseur. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{r}$ de la définition est unique.

   Il s'appelle la *résultante* du torseur $\mathcal{M}$. On admet que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \to & \overrightarrow{\mathcal{E}} \\ \mathcal{M} & \mapsto & \overrightarrow{r} \end{array}$ est linéaire.
4. (a) Vérifier qu'une application constante de $\mathcal{E}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est un torseur et en donner la résultante.

   Un tel torseur s'appelle un *couple*.

   (b) Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ des couples est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{T}$ et que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \to & \overrightarrow{\mathcal{E}} \\ \mathcal{M} & \mapsto & \mathcal{M}(O) \end{array}$ est un isomorphisme.

   (c) En déduire la dimension de $\mathcal{C}$.
5. On appelle *glisseur* tout torseur qui s'annule en au moins un point de $\mathcal{E}$.

   (a) Soit O_1 un point de $\mathcal{E}$ distinct de O et $\overrightarrow{r}$ un vecteur non nul et non colinéaire à $\overrightarrow{OO_1}$. On note $g_0 : A \mapsto \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{OA}$ et $g_1 : A \mapsto \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{O_1A}$.

   Montrer que g_0 et g_1 sont des glisseurs, mais que $g_0 - g_1$ n'en est pas un. Expliquer pourquoi l'ensemble $\mathcal{G}$ des glisseurs n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{T}$.

(b) Montrer que l'ensemble $\mathcal{G}_O$ des glisseurs s'annulant en O est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{T}$ et que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_O & \to & \overrightarrow{\mathcal{E}} \\ \mathcal{M} & \mapsto & \overrightarrow{r} \end{array}$, où $\overrightarrow{r}$ est la résultante de $\mathcal{M}$, est un isomorphisme.

(c) En déduire la dimension de $\mathcal{G}_O$.

(d) Démontrer que $\mathcal{T} = \mathcal{C} \oplus \mathcal{G}_O$. Quelle est la dimension de $\mathcal{T}$?

Partie II — Équiprojectivité

6. Démontrer que, si $\mathcal{M}$ est un torseur alors $\mathcal{M}$ vérifie la propriété suivante :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, \qquad \langle \mathcal{M}(A), \overrightarrow{AB} \rangle = \langle \mathcal{M}(B), \overrightarrow{AB} \rangle$$

Cette propriété est connue sous le nom de propriété d'équiprojectivité.

On se propose d'étudier la réciproque.

7. (a) Rappeler la définition d'une matrice antisymétrique.

(b) L'espace est muni du repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ et on identifie tout vecteur avec la matrice colonne 3×1 contenant ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

Montrer qu'il existe un unique vecteur $\overrightarrow{r}$, dont on donnera les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, tel que

$$\forall \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{u}$$

8. Soit $f : \overrightarrow{\mathcal{E}} \to \overrightarrow{\mathcal{E}}$ une application telle que pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, $\langle f(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{v} \rangle = -\langle \overrightarrow{u}, f(\overrightarrow{v}) \rangle$.

(a) Montrer que f est linéaire.

Pour λ et μ deux nombres réels, on pourra considérer le vecteur $\overrightarrow{w} = f(\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}) - \lambda f(\overrightarrow{u}) - \mu f(\overrightarrow{v})$ et montrer qu'il est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{E}$.

(b) Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est une matrice antisymétrique.

(c) Démontrer qu'il existe un unique vecteur $\overrightarrow{r} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$ tel que pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$, $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{u}$.

9. Soit $\mathcal{M} : \mathcal{E} \to \overrightarrow{\mathcal{E}}$ une application vérifiant la propriété d'équiprojectivité. Montrer alors que $\mathcal{M}$ est un torseur.

On pourra considérer l'application $f : \overrightarrow{\mathcal{E}} \to \overrightarrow{\mathcal{E}}$ définie pour tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$ par $f(\overrightarrow{u}) = \mathcal{M}(O') - \mathcal{M}(O)$ où O' désigne le translaté du point O par le vecteur $\overrightarrow{u}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{u}$.

$\boxed{\textbf{Corrigé}}$

Réponse du problème

Partie I — L'espace $\mathcal{T}$ des torseurs

1. Soit $\overrightarrow{r}$ un vecteur de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ et $\mathcal{M} : A \mapsto \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{OA}$.
   Soit $(A, B) \in \mathcal{E}^2$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(B) &= \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{OB} \\ &= \overrightarrow{r} \wedge \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\right) \\ &= \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{AB} \\ &= \mathcal{M}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{r}\end{aligned}$$

   Ainsi $\boxed{\mathcal{M} : A \mapsto \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{OA} \text{ est un torseur.}}$

2. L'application $\mathcal{M} : A \mapsto \overrightarrow{0}$ est bien un torseur (il suffit de prendre $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{0}$).
   Soit $\mathcal{M}_\infty$ et $\mathcal{M}_\in$ deux torseurs et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(A, B) \in \mathcal{E}^2$

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{M}_\infty + \lambda\mathcal{M}_\in\right)(B) &= \mathcal{M}_\infty(B) + \lambda\mathcal{M}_\in(B) \\ &= \mathcal{M}_\infty(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{r_1} + \lambda\left(\mathcal{M}_\in(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{r_2}\right) \\ &= \mathcal{M}_\infty(A) + \lambda\mathcal{M}_\in(A) + \overrightarrow{BA} \wedge (\overrightarrow{r_1} + \lambda\overrightarrow{r_2}) \\ &= \left(\mathcal{M}_\infty + \lambda\mathcal{M}_\in\right)(A) + \overrightarrow{BA} \wedge (\overrightarrow{r_1} + \lambda\overrightarrow{r_2})\end{aligned}$$

   Donc $\mathcal{M}_\infty + \lambda\mathcal{M}_\in$ est un torseur.

   Ainsi $\boxed{\text{l'ensemble } \mathcal{T} \text{ des torseurs est un sous-espace vectoriel du } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel } \mathcal{F}(\mathcal{E}, \overrightarrow{\mathcal{E}}) \text{ des applications de } \mathcal{E} \text{ dans } \overrightarrow{\mathcal{E}}.}$

3. (a) Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. On sait que

   $\boxed{\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \text{ si et seulement si } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont colinéaires.}}$

   (b) Soit $\mathcal{M}$ un torseur. On suppose qu'il existe $\overrightarrow{r_1}$ et $\overrightarrow{r_2}$ deux vecteurs tels que

$$\begin{aligned}&\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2 \qquad \mathcal{M}(B) = \mathcal{M}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{r}_1 \\ &\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2 \qquad \mathcal{M}(B) = \mathcal{M}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{r}_2\end{aligned}$$

   En soustrayant on en déduit que

$$\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2 \qquad \overrightarrow{BA} \wedge (\overrightarrow{r}_1 - \overrightarrow{r_2}) = \overrightarrow{0}$$

   Ainsi $\overrightarrow{r}_1 - \overrightarrow{r_2}$ est colinéaire à tous les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ de l'espace. Ceci n'est possible que si $\overrightarrow{r}_1 - \overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{0}$.

   On en déduit que $\boxed{\text{le vecteur } \overrightarrow{r} \text{ de la définition est unique.}}$

4. (a) Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de l'espace et $\mathcal{M} : A \mapsto \overrightarrow{u}$.
   Pour $(A, B) \in \mathcal{E}^2$ on a alors

$$\mathcal{M}(B) = \mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{0}$$

   Ainsi $\boxed{\mathcal{M} : A \mapsto \overrightarrow{u} \text{ est un torseur, sa résultante est le vecteur nul } \overrightarrow{0}.}$

(b) Soit $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ deux vecteurs et soit $\mathcal{M}_1 : A \mapsto \overrightarrow{u_1}$, $\mathcal{M}_2 : A \mapsto \overrightarrow{u_2}$ les couples associés. Alors $\mathcal{M}_1 + \lambda\mathcal{M}_2$ est l'application constante égale à $\overrightarrow{u_1} + \lambda\overrightarrow{u_2}$ et donc est bien un couple.

Ainsi $\boxed{\text{l'ensemble } \mathcal{C} \text{ des couples est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{T}}$

Notons φ l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \to & \overrightarrow{\mathcal{E}} \\ \mathcal{M} & \mapsto & \mathcal{M}(O) \end{array}$

Soit $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ deux vecteurs et soit $\mathcal{M}_1 : A \mapsto \overrightarrow{u_1}$, $\mathcal{M}_2 : A \mapsto \overrightarrow{u_2}$. Alors

$$\varphi(\mathcal{M}_1 + \lambda\mathcal{M}_2) = (\mathcal{M}_1 + \lambda\mathcal{M}_2)(0) = \overrightarrow{u_1} + \lambda\overrightarrow{u_2} = \varphi(\mathcal{M}_1) + \lambda\varphi(\mathcal{M}_2)$$

φ est donc bien linéaire.

Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$, l'application $\mathcal{M} : A \mapsto \overrightarrow{u}$ est bien un couple et $\varphi(\mathcal{M}) = \overrightarrow{u}$.

Ainsi φ est surjective.

Soit maintenant $\mathcal{M}$ un couple tel que $\varphi(\mathcal{M}) = \overrightarrow{0}$.

Alors, comme $\mathcal{M}$ est une application constante (c'est un couple), on en déduit que, pour tout $A \in \mathcal{E}$, $\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(O) = \overrightarrow{0}$. $\mathcal{M}$ est donc l'application nulle.

Ainsi φ est injective.

φ est une application linéaire surjective et injective, $\boxed{\text{c'est donc un isomorphisme.}}$

(c) $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est de dimension 3 et φ est un isomorphisme, ainsi $\boxed{\dim(\mathcal{C}) = 3.}$

5. (a) Soit O_1 un point de $\mathcal{E}$ distinct de O et $\overrightarrow{r}$ un vecteur non nul et non colinéaire à $\overrightarrow{OO_1}$. On note $g_0 : A \mapsto \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{OA}$ et $g_1 : A \mapsto \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{O_1A}$.

Soit $M = O + \overrightarrow{r}$ i.e. M est l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{r}$ ou encore $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r}$.

On a alors $g_0(M) = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{r} = \overrightarrow{0}$. $\boxed{g_0 \text{ est donc un glisseur.}}$

De même, en considérant $M_1 = O_1 + \overrightarrow{r}$ on a $g_1(M_1) = \overrightarrow{0}$ donc $\boxed{g_1 \text{ est un glisseur.}}$

Pour $A \in \mathcal{E}$ on a

$$(g_0 - g_1)(A) = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{O_1A} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{OO_1}$$

Ainsi $g_0 - g_1$ est une application constante i.e. un couple. Comme $\overrightarrow{r}$ et $\overrightarrow{OO_1}$ sont non colinéaire, $\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{OO_1} \neq \overrightarrow{0}$ et donc $g_0 - g_1$ ne s'annule jamais.

Ainsi $\boxed{g_0 - g_1 \text{ n'est pas un glisseur.}}$

L'ensemble $\mathcal{G}$ des glisseurs n'est pas stable par combinaison linéaire $\boxed{\text{ce n'est donc pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{T}.}$

(b) Soit g_1 et g_2 deux glisseurs s'annulant en 0 et λ. Alors $g_1 + \lambda g_2$ est un torseur d'après la question 2. et $(g_1 + \lambda g_2)(O) = g_1(O) + \lambda g_2(O) = \overrightarrow{0}$.

Ainsi $g_1 + \lambda g_2$ est un glisseur s'annulant en O.

On en déduit que $\boxed{\mathcal{G}_O \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{T}.}$

Notons ψ l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_O & \to & \overrightarrow{\mathcal{E}} \\ \mathcal{M} & \mapsto & \overrightarrow{r} \end{array}$

ψ est la restriction de φ au sous-espace vectoriel $\mathcal{G}_O$ c'est donc encore une application linéaire.

Soit g un glisseur tel que $\psi(g) = \overrightarrow{0}$.

Soit $A \in \mathcal{E}$, on a alors $g(A) = g(O) + \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$. g est donc le torseur nul.

Ainsi ψ est injective.

Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$ et $g : A \mapsto \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OA}$.

D'après la question 1. g est un torseur de résultante $\overrightarrow{u}$. De plus $g(O) = \overrightarrow{0}$. g est donc un glisseur s'annulant en 0 et $\psi(g) = \overrightarrow{u}$.

Ainsi ψ est surjective.

On en déduit que $\boxed{\text{l'application } \begin{array}{ccc} \mathcal{G}_O & \to & \overrightarrow{\mathcal{E}} \\ \mathcal{M} & \mapsto & \overrightarrow{r} \end{array} \text{ est un isomorphisme.}}$

(c) $\dim(\overrightarrow{\mathcal{E}}) = 3$ et ψ est un isomorphisme. Ainsi $\boxed{\dim(\mathcal{G}_O) = 3.}$

(d) Soit $\mathcal{M} \in \mathcal{C} \cap \mathcal{G}_O$

Alors $\mathcal{M}$ est une application constante qui en particulier s'annule en O, c'est donc l'application nulle.

Ainsi $\mathcal{C} \cap \mathcal{G}_O = \{0_{\mathcal{T}}$.

Soit maintenant $\mathcal{M} \in \mathcal{T}$, montrons que $\mathcal{M}$ peut s'écrire comme la somme d'un couple et d'un glisseur s'annulant en O.

Soit $A \in \mathcal{E}$, on a alors

$$\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(O) + \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{r}$$

Notons $c : A \mapsto \mathcal{M}(O)$ et $g : A \mapsto \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{OA}$.

c est un couple, g est un glisseur s'annulant en O et $\mathcal{M} = c + g$.

Ainsi $\mathcal{T} = \mathcal{C} + \mathcal{G}_O$

Finalement on a bien $\boxed{\mathcal{T} = \mathcal{C} \oplus \mathcal{G}_O.}$

En particulier $\boxed{\dim(\mathcal{T}) = \dim(\mathcal{C}) + \dim(\mathcal{G}_O) = 3 + 3 = 6.}$

Partie II — Équiprojectivité

6. Soit $\mathcal{M}$ est un torseur et $(A, B) \in \mathcal{E}^2$.

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{M}(B), \overrightarrow{AB} \rangle &= \langle \mathcal{M}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{r}, \overrightarrow{AB} \rangle \\
&= \langle \mathcal{M}(A), \overrightarrow{AB} \rangle + \langle \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{r}, \overrightarrow{AB} \rangle \\
&= \langle \mathcal{M}(A), \overrightarrow{AB} \rangle + \left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{r}, \overrightarrow{AB} \right] \\
&= \langle \mathcal{M}(A), \overrightarrow{AB} \rangle \qquad \textit{car } \overrightarrow{BA} \textit{ et } \overrightarrow{AB} \textit{ sont colinéaires}
\end{aligned}$$

Produit mixte

Pour $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in \mathcal{E}^3$ on définit le produit mixte $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \langle \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle$. Il est égal aux déterminant de la matrice des coordonnées des vecteurs $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ dans une base orthonormée directe.

On a donc bien

$$\boxed{\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, \qquad \langle \mathcal{M}(A), \overrightarrow{AB} \rangle = \langle \mathcal{M}(B), \overrightarrow{AB} \rangle}$$

7. (a) $\boxed{\text{Une matrice } M \text{ est antisymétrique si } M^\top = -M.}$

(b) Soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$

Alors

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 2z \\ -x + 3z \\ -2x - 3z \end{pmatrix}$$

De plus, si $\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix}$

Ainsi, $\boxed{\text{en prenant } \overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ on obtient}}$

$$\boxed{\forall \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{u}}$$

8. (a) Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{\mathcal{E}}^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$

On a alors

$$\begin{aligned}\langle f(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}) - \lambda f(\overrightarrow{u}) - \mu f(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{x}\rangle &= \langle f(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}), \overrightarrow{x}\rangle - \lambda\langle f(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{x}\rangle - \mu\langle f(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{x}\rangle \\ &= -\langle \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}, f(\overrightarrow{x})\rangle + \lambda\langle \overrightarrow{u}, f(\overrightarrow{x})\rangle + \mu\langle \overrightarrow{v}, f(\overrightarrow{x})\rangle \\ &= \langle -\lambda\overrightarrow{u} - \mu\overrightarrow{v} + \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}, f(\overrightarrow{x})\rangle \\ &= \langle \overrightarrow{0}, f(\overrightarrow{x})\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi $f(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}) - \lambda f(\overrightarrow{u}) - \mu f(\overrightarrow{v})$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{E}$ donc en particulier à lui-même. C'est donc le vecteur nul.

En d'autres termes $f(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}) = \lambda f(\overrightarrow{u}) + \mu f(\overrightarrow{v})$

$\boxed{f \text{ est donc linéaire.}}$

(b) La base $\mathcal{B}$ est orthonormée, ainsi la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice $\begin{pmatrix} \langle f(\overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_1}\rangle & \langle f(\overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_1}\rangle & \langle f(\overrightarrow{e_3}), \overrightarrow{e_1}\rangle \\ \langle f(\overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_2}\rangle & \langle f(\overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_2}\rangle & \langle f(\overrightarrow{e_3}), \overrightarrow{e_2}\rangle \\ \langle f(\overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_3}\rangle & \langle f(\overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_3}\rangle & \langle f(\overrightarrow{e_3}), \overrightarrow{e_3}\rangle \end{pmatrix}$

Par définition de f on a, pour $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, $\langle f(\overrightarrow{e_i}), \overrightarrow{e_j}\rangle = -\langle \overrightarrow{e_i}, f(\overrightarrow{e_j})\rangle = -\langle f(\overrightarrow{e_j}), \overrightarrow{e_i}\rangle$

En particulier $\langle f(\overrightarrow{e_i}), \overrightarrow{e_i}\rangle = 0$.

Ainsi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \langle f(\overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_1}\rangle & \langle f(\overrightarrow{e_3}), \overrightarrow{e_1}\rangle \\ -\langle f(\overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_1}\rangle & 0 & \langle f(\overrightarrow{e_3}), \overrightarrow{e_2}\rangle \\ -\langle f(\overrightarrow{e_3}), \overrightarrow{e_1}\rangle & -\langle f(\overrightarrow{e_3}), \overrightarrow{e_2}\rangle & 0 \end{pmatrix}$.

En particulier $\boxed{\text{la matrice de } f \text{ dans la base } \mathcal{B} \text{ est une matrice antisymétrique.}}$

(c) Notons $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$

Si $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ alors

$$f(\overrightarrow{u}) = \begin{pmatrix} ay + bz \\ -ax + cz \\ -bx - cy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ b \\ -a \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Le vecteur } \overrightarrow{r} \text{ de coordonnées } \begin{pmatrix} -c \\ b \\ -a \end{pmatrix} \text{ dans } \mathcal{B} \text{ est ainsi l'unique vecteur } \overrightarrow{r} \in \overrightarrow{\mathcal{E}} \text{ tel que pour tout } \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}},\ f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{u}.}$

9. Soit $\mathcal{M} : \mathcal{E} \to \overrightarrow{\mathcal{E}}$ une application vérifiant la propriété d'équiprojectivité.

Soit $f : \overrightarrow{\mathcal{E}} \to \overrightarrow{\mathcal{E}}$ définie pour tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$ par $f(\overrightarrow{u}) = \mathcal{M}(O') - \mathcal{M}(O)$ où O' désigne le translaté du point O par le vecteur $\overrightarrow{u}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{u}$.

Nous allons montrer que, pour $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{\mathcal{E}}^2$, $\langle f(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{v}\rangle = \langle u, f(\overrightarrow{v})\rangle$.

Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{\mathcal{E}}^2$. Notons O' désigne le translaté du point O par le vecteur $\overrightarrow{u}$ et O'' le translaté du point O par le vecteur $\overrightarrow{u}$. C'est-à-dire $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{OO''} = \overrightarrow{v}$

$$\begin{aligned}
\langle f(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{v}\rangle &= \langle \mathcal{M}(O') - \mathcal{M}(O), \overrightarrow{v} \\
&= \langle \mathcal{M}(O'), \overrightarrow{OO''}\rangle - \langle \mathcal{M}(O), \overrightarrow{OO''}\rangle \\
&= \langle \mathcal{M}(O'), \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'O''}\rangle - \langle \mathcal{M}(O), \overrightarrow{OO''}\rangle \\
&= \langle \mathcal{M}(O'), \overrightarrow{OO'}\rangle + \langle \mathcal{M}(O'), \overrightarrow{O'O''}\rangle - \langle \mathcal{M}(O), \overrightarrow{OO''}\rangle \\
&= \langle \mathcal{M}(O), \overrightarrow{OO'}\rangle + \langle \mathcal{M}(O''), \overrightarrow{O'O''}\rangle - \langle \mathcal{M}(O''), \overrightarrow{OO''}\rangle \\
&= \langle \mathcal{M}(O), \overrightarrow{OO'}\rangle + \langle \mathcal{M}(O''), \overrightarrow{O'O''} - \overrightarrow{OO''}\rangle \\
&= \langle \mathcal{M}(O), \overrightarrow{OO'}\rangle + \langle \mathcal{M}(O''), \overrightarrow{O'O}\rangle \\
&= \langle \mathcal{M}(O), \overrightarrow{OO'}\rangle - \langle \mathcal{M}(O''), \overrightarrow{OO'}\rangle \\
&= \langle \mathcal{M}(O) - \mathcal{M}(O''), \overrightarrow{OO'}\rangle \\
&= -\langle f(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{u}\rangle
\end{aligned}$$

Ainsi
$$\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{\mathcal{E}}^2, \qquad \langle f(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{v}\rangle = \langle u, f(\overrightarrow{v})\rangle$$

D'après la question 8. il existe alors un vecteur $\overrightarrow{r}$ tel que, pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$, $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{u}$.

Soit $(A, B) \in \mathcal{E}^2$. Alors $\mathcal{M}(A) - \mathcal{M}(O) = f(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{OA}$ et $\mathcal{M}(B) - \mathcal{M}(O) = f(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{OB}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(B) &= \mathcal{M}(O) + \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{OB} \\
&= \mathcal{M}(A) - \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{OB} \\
&= \mathcal{M}(A) + \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{OB} \\
&= \mathcal{M}(A) + \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{AB} \\
&= \mathcal{M}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{r}
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\mathcal{M} \text{ est un torseur.}}$

On a montré dans ce problème l'équivalence pour une application $\mathcal{M} : \mathcal{E} \to \overrightarrow{\mathcal{E}}$ entre la propriété d'équiprojectivité et la relation de Varignon.

D'un point de vue mathématiques il est plus usuel d'appeler torseur un champ de vecteurs équiprojectif mais on vient de montrer que cette définition est équivalente à la définition par la résultante.